Aufgabe 1 (*Zum Rotationsindex*) (4 Punkte)
Berechnen Sie den Rotationsindex der folgenden Kurven $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$.

(1) $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$

(2) $\gamma(t) = i/2 + (1 - 2\sin t)e^{it}$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ eine reguläre, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Bezüglich der Einheitsnormalen ν sei die Krümmung $\kappa \geq 0$. Zeigen Sie: Für alle $s_0 \in I$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\langle c(s) - c(s_0), \nu(s_0)\rangle \geq 0 \quad \text{für alle } s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon),$$

d.h. c liegt lokal auf einer Seite der Tangente.

Aufgabe 3 (*Elastische Energie von Kurven*) (4 Punkte)
Sei $\gamma \in C^2([0, L], \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert und C^1-geschlossen mit Rotationsindex $\operatorname{ind}(\gamma) \neq 0$. Zeigen Sie

$$\int_0^L \kappa^2 \, ds \geq \frac{4\pi^2}{L},$$

mit Gleichheit nur für Kreise.
Bemerkung: Die Aussage gilt auch, falls $\operatorname{ind}(\gamma) = 0$.

Aufgabe 4 (*Rotationsindex*) (4 Punkte)
Sei $\gamma \in C^0([0, L], \mathbb{R}^2)$ eine einfach geschlossene Kurve. Es existiere eine Unterteilung $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = L$ mit $\gamma_{|[s_{i-1}, s_i]} \in C^2$ und $|\gamma'_{|[s_{i-1}, s_i]}| = 1$. Für die orientierten Außenwinkel sei vorausgesetzt, dass

$$\alpha_i := \angle(\gamma'_-(s_i), \gamma'_+(s_i)) \in (-\pi, \pi) \quad \text{für } i = 1, \ldots, N, \text{ wobei } \gamma'_+(L) := \gamma'_+(0).$$

Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung des Umlaufsatzes:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa(s)\, ds + \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^N \alpha_i = \pm 1.$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, den 01.06.11.